Μάθημα
Παρασκευή
24/11/2017
15:00-18:00

21/11/17

Κατανομή Poisson (~1837)

(I) Η Poisson κατανομή ως το όριο της διωνυμικής κατανομής

Πρόταση: Έστω η τ.μ. X με διωνυμική κατανομή $B(n, p_n)$ ώστε $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ και $\lim_{n\to\infty} (n p_n) = \lambda$, $\lambda > 0$

Τότε
$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{x} p_n^x (1-p_n)^{n-x} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots$$

Απόδειξη:
$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^x$$

Παρατήρηση: i) $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \geq 0$, αφού $\lambda > 0$ $\quad x = 0, 1, 2$

ii)
$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$

Άρα η $\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ είναι μια σ.π.

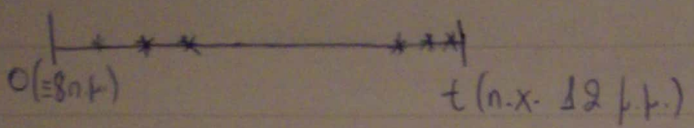
Ορισμός: Έστω τ.μ. X. Η τ.μ. X λέγεται Poisson με παράμετρο λ, $\lambda > 0$, αν το σύνολο τιμών της τ.μ. X είναι $x = 0, 1, 2, \ldots$ και η σ.π. της X δίνεται από τη σχέση.
$$P_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \quad \lambda > 0$$

Συμβολισμός: $X \sim P(\lambda)$

(I) Η Poisson κατανομή με βάση τη διαδικασία Poisson.

Θεωρώ τ.π. που → εξελίσσεται στο "χρόνο".

→ κάποιες χρονικές στιγμές πραγματοποιούνται κάποια χαρακτηριστικά του φαινομένου που μελετώ



* = αφίξεις Poisson

διαδικασία Poisson

<u>Ενδιαφέρει</u>: Το πλήθος των αφίξεων Poisson (*) στο $[0,t]$

Έστω $X(t)$ το πλήθος των αφίξεων στο $[0,t]$

<u>Παρατήρηση</u>: Το $X(t)$ δεν μπορεί να προβλεφθεί.

i) Άρα t = προκαθορισμένο τότε $X(t)$ είναι τ.μ.

ii) Αν t δίνεται συγκεκριμένο τότε η $X(t)$ λέγεται στοχαστική διαδικασία.

<u>Τιμές της τ.μ. $X(t)$</u>: $x=0,1,2,\dots$

Άρα $X(t)$ διακριτή τ.μ. Ποια είναι η σ.π. της $X(t)$;

<u>Πρόταση</u>: Έστω $X(t)$ μια τ.μ. που παριστά το πλήθος των αφίξεων σε μια διαδικασία Poisson και έστω $\lambda>0$. Κάτω από κάποιες προϋποθέσεις η τ.μ. $X(t)$ έχει σ.π.

$$P_{X(t)}(x) = P(X(t)=x) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!} \qquad x=0,1,2,\dots$$

Παρατήρηση: α) Η $X(t) \sim P(\lambda t)$, $\lambda > 0$

β) Η παράμετρος λ εκφράζει το ρυθμό των αφίξεων στη διαδικασία Poisson.

γ) Αν $t=1$ τότε η $X(t)$ συμβολίζεται με X και η σ.π. της X είναι: $P_X(x) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x=0,1,2,\dots$

<u>Παράδειγμα</u>: Ρυθμός κλήσεων σε τηλ. κέντρο = 30 κλήσεις/ώρα

α) $P\left(\begin{matrix}\text{καμιάς κλήσης σε} \\ \text{διάστημα 3 λεπτών}\end{matrix}\right)$, β) $P\left(\begin{matrix}\text{περισσότερων από 5} \\ \text{κλήσεων σε διάστημα} \\ \text{5 λεπτών}\end{matrix}\right)$

<u>Λύση</u>: α) Έστω X πλήθος κλήσεων σε χρονικό διάστημα 3 min

Τότε $X \sim P(\lambda)$

1 ώρα = 60 min έχω 30 κλήσεις

3 min $\lambda = ;$

$$\lambda = \frac{3 \times 30}{60} = \frac{3}{2} \qquad \text{Άρα } X \sim P\left(\tfrac{3}{2}\right)$$

$$P_X(x) = \frac{e^{-3/2}(3/2)^x}{x!}$$

$$P_X(0) = \frac{e^{-3/2}(3/2)^0}{0!} = e^{-3/2}$$

β) Έστω Y ~~το~~ πλήθος των κλήσεων στα 5 min

$Y \sim P(\lambda)$

60 min 30 κλήσεις

5 min λ

$$\lambda = \frac{30 \times 5}{60} = 5/2$$

Άρα $Y \sim P\left(\tfrac{5}{2}\right)$ $\quad P_Y(y) = \dfrac{e^{-5/2}(5/2)^y}{y!}$ $\quad y = 0, 1, 2 \dots$

$$P(Y \geq 5) = 1 - P(y < 5) = 1 - \sum_{y=0}^{4} \frac{e^{-5/2} (5/2)^y}{y!}$$

<u>Παράδειγμα:</u> 100 δέντρα / στρέμμα ($\simeq 1000$ τ.μ.) $\boxed{\text{στρέμμα}}$ 33.3..

α) P(σε 50 τ.μ. να ∃ λιγότερα από 8 δέντρα) β) P(σε 50 τ.μ. να ∃ μεταξύ τριών και πέντε δέντρων)

<u>Λύση:</u> α) Έστω X τ.μ. παριστά πλήθος (αφίξεων) δέντρων στα 50 τ.μ.

$$X \sim P(\lambda)$$

1.000 τ.μ. 100

50 τ.μ. λ;

$\lambda = \frac{50 \times 100}{1000} = 5$

$$P_X(x) = \frac{e^{-5} 5^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \ldots$$

$$P(X \leq 8) = \sum_{x \leq 8} P_X(x) = \sum_{x=0}^{8} \frac{e^{-5} 5^x}{x!} = \ldots$$

β) $P(3 \leq X \leq 5) = \sum_{x=3,4,5} \frac{e^{-5} 5^x}{x!} = \ldots$